

1 Transformada discreta del coseno (DCT). Definición

La DCT de una secuencia $u[m, n]$, $0 \leq m, n \leq N - 1$ se define

$$v[k, l] = \alpha(k)\alpha(l) \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} u[m, n] \cos \left[\frac{(2m+1)k\pi}{2N} \right] \cos \left[\frac{(2n+1)l\pi}{2N} \right] \quad (1)$$

donde el coeficiente $\alpha(\psi)$ ($\psi = k, l$) toman los valores

$$\alpha(\psi) = \begin{cases} \sqrt{\frac{1}{N}} & \psi = 0 \\ \sqrt{\frac{2}{N}} & \psi = 1, \dots, N-1 \end{cases} \quad (2)$$

Como puede verse es una transformación lineal, de núcleo de transformación separable, y enteramente real si la señal original (como suele ser el caso) es real.

2 Compactación de energía de la DCT con respecto a la DFT

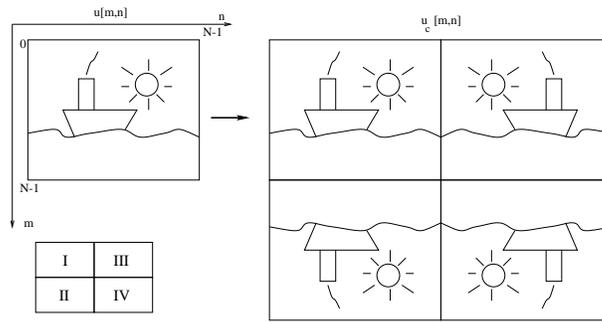


Figura 1: Ilustración de la creación de $u_c[m, n]$ a partir de $u[m, n]$

Creemos a partir de la señal $u[m, n]$ una versión de longitud doble de la misma, consistente en reflexiones de ésta en torno a un eje tanto horizontal como vertical. La figura 1 muestra cómo se genera esta composición. Denotemos a la señal (imagen) compuesta por $u_c[m, n]$.

El objetivo de este apartado es demostrar que existe una relación entre la DFT de la secuencia $u_c[m, n]$ y la DCT de $u[m, n]$. En base a ello podemos extraer conclusiones comparativas de las propiedades de compactación de energía de la DCT relativas a tales propiedades en el caso de la DFT.

Para tal fin, comencemos por plantear la DFT unitaria de $u_c[m, n]$. Como es sabido

$$DFT_u\{u_c[m, n]\} = \frac{1}{2N} \sum_{m=0}^{2N-1} \sum_{n=0}^{2N-1} u_c[m, n] e^{-j\frac{2\pi}{2N}km} e^{-j\frac{2\pi}{2N}ln} \quad (3)$$

Para aproximarnos a una DCT comencemos dividiendo el sumatorio global en un sumatorio en cada uno de los cuatro cuadrantes de la imagen compuesta:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2N} \sum_{m=0}^{2N-1} \sum_{n=0}^{2N-1} u_c[m, n] e^{-j\frac{2\pi}{2N}km} e^{-j\frac{2\pi}{2N}ln} &= \frac{1}{2N} \left(\sum_{m=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} u_c[m, n] e^{-j\frac{2\pi}{2N}km} e^{-j\frac{2\pi}{2N}ln} + \right. \\ &= \sum_{m=N}^{2N-1} \sum_{n=0}^{N-1} u_c[m, n] e^{-j\frac{2\pi}{2N}km} e^{-j\frac{2\pi}{2N}ln} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{n=N}^{2N-1} u_c[m, n] e^{-j \frac{2\pi}{2N} km} e^{-j \frac{2\pi}{2N} ln} + \\
&= \sum_{m=N}^{2N-1} \sum_{n=N}^{2N-1} u_c[m, n] e^{-j \frac{2\pi}{2N} km} e^{-j \frac{2\pi}{2N} ln} \\
&= \frac{1}{2N} (S(I) + S(II) + S(III) + S(IV)) \\
&= \frac{1}{2N} S(I \rightarrow IV) \tag{4}
\end{aligned}$$

Para explotar las relaciones creadas por la reflexión de la imagen $u[m, n]$ tomemos $S(II)$ y hagamos el cambio de variable $m' = 2N - 1 - m$. Así pues

$$\begin{aligned}
S(II) &= \sum_{m=N}^{2N-1} \sum_{n=0}^{N-1} u_c[m, n] e^{-j \frac{2\pi}{2N} km} e^{-j \frac{2\pi}{2N} ln} \\
&= \sum_{m'=N-1}^0 \sum_{n=0}^{N-1} u_c[2N - 1 - m', n] e^{-j \frac{2\pi}{2N} k(2N-1-m')} e^{-j \frac{2\pi}{2N} ln} \\
&= \sum_{m'=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} u_c[2N - 1 - m', n] e^{-j \frac{2\pi}{2N} k2N} e^{j \frac{2\pi}{2N} k(m'+1)} e^{-j \frac{2\pi}{2N} ln} \\
&= \sum_{m'=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} u[m', n] e^{j \frac{2\pi}{2N} k(m'+1)} e^{-j \frac{2\pi}{2N} ln} \tag{5}
\end{aligned}$$

puesto que $u_c[2N - 1 - m', n] = u[m, n]$ en el segundo cuadrante. Por ello, escribiendo ahora las cosas en función de un nuevo índice m obtenemos

$$S(II) = \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} u[m, n] e^{j \frac{2\pi}{2N} k(m+1)} e^{-j \frac{2\pi}{2N} ln} \tag{6}$$

Operando de la misma manera con $S(III)$ y $S(IV)$ obtendríamos

$$S(III) = \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} u[m, n] e^{-j \frac{2\pi}{2N} km} e^{j \frac{2\pi}{2N} l(n+1)} \tag{7}$$

y

$$S(IV) = \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} u[m, n] e^{j \frac{2\pi}{2N} k(m+1)} e^{j \frac{2\pi}{2N} l(n+1)} \tag{8}$$

Se trata ahora de llevar a cabo la suma. Como puede observarse, existen numerosos términos en común entre los sumatorios parciales, de forma que podemos extraer factor común para simplificar los cálculos. Asimismo, podemos aplicar la propiedad

$$e^{j\lambda(a+1)} + e^{-j\lambda a} = e^{j\lambda \frac{1}{2}} \left(e^{j\lambda(a+\frac{1}{2})} + e^{-j\lambda(a+\frac{1}{2})} \right) \tag{9}$$

Con ello, con respecto a los sumatorios $S(I)$ y $S(II)$

$$\begin{aligned}
S(I) + S(II) &= \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} u[m, n] e^{-j \frac{2\pi}{2N} km} e^{-j \frac{2\pi}{2N} ln} + \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} u[m, n] e^{j \frac{2\pi}{2N} k(m+1)} e^{-j \frac{2\pi}{2N} ln} \\
&= \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} u[m, n] e^{j \frac{2\pi}{2N} k \frac{1}{2}} e^{-j \frac{2\pi}{2N} ln} \left(e^{-j \frac{2\pi}{2N} k(m+\frac{1}{2})} + e^{j \frac{2\pi}{2N} k(m+\frac{1}{2})} \right) \\
&= \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} u[m, n] e^{j \frac{\pi}{2N} k} e^{-j \frac{2\pi}{2N} ln} 2 \cos \left[\frac{2\pi}{2N} k \left(m + \frac{1}{2} \right) \right] \tag{10}
\end{aligned}$$

Haciendo lo propio con respecto a $S(III)$ y $S(IV)$:

$$\begin{aligned}
S(III) + S(IV) &= \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} u[m, n] e^{-j \frac{2\pi}{2N} km} e^{j \frac{2\pi}{2N} l(n+1)} + \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} u[m, n] e^{j \frac{2\pi}{2N} k(m+1)} e^{j \frac{2\pi}{2N} l(n+1)} \\
&= \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} u[m, n] e^{j \frac{2\pi}{2N} k \frac{1}{2}} e^{j \frac{2\pi}{2N} l(n+1)} \left(e^{-j \frac{2\pi}{2N} k(m+\frac{1}{2})} + e^{j \frac{2\pi}{2N} k(m+\frac{1}{2})} \right) \\
&= \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} u[m, n] e^{j \frac{\pi}{2N} k} e^{j \frac{2\pi}{2N} l(n+1)} 2 \cos \left[\frac{2\pi}{2N} k \left(m + \frac{1}{2} \right) \right]
\end{aligned} \tag{11}$$

y uniendo los resultados de las ecuaciones (10) y (11)

$$\begin{aligned}
S(I \rightarrow IV) &= \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} u[m, n] e^{j \frac{\pi}{2N} k} e^{-j \frac{2\pi}{2N} ln} 2 \cos \left[\frac{2\pi}{2N} k \left(m + \frac{1}{2} \right) \right] + \\
&\quad \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} u[m, n] e^{j \frac{\pi}{2N} k} e^{j \frac{2\pi}{2N} l(n+1)} 2 \cos \left[\frac{2\pi}{2N} k \left(m + \frac{1}{2} \right) \right] \\
&= \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} u[m, n] e^{j \frac{\pi}{2N} k} 2 \cos \left[\frac{2\pi}{2N} k \left(m + \frac{1}{2} \right) \right] e^{j \frac{2\pi}{2N} l \frac{1}{2}} \left(e^{-j \frac{2\pi}{2N} l(n+\frac{1}{2})} + e^{j \frac{2\pi}{2N} l(n+\frac{1}{2})} \right) \\
&= \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} u[m, n] e^{j \frac{\pi}{2N} k} e^{j \frac{\pi}{2N} l} 2 \cos \left[\frac{2\pi}{2N} k \left(m + \frac{1}{2} \right) \right] 2 \cos \left[\frac{2\pi}{2N} l \left(n + \frac{1}{2} \right) \right]
\end{aligned} \tag{12}$$

por lo que podemos concluir que

$$\begin{aligned}
DFT_u \{u_c[m, n]\} &= \frac{1}{2N} \sum_{m=0}^{2N-1} \sum_{n=0}^{2N-1} u_c[m, n] e^{-j \frac{2\pi}{2N} km} e^{-j \frac{2\pi}{2N} ln} \\
&= \frac{1}{2N} (S(I) + S(II) + S(III) + S(IV)) \\
&= \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} u[m, n] e^{j \frac{\pi}{2N} k} e^{j \frac{\pi}{2N} l} 2 \cos \left[\frac{2\pi}{2N} k \left(m + \frac{1}{2} \right) \right] 2 \cos \left[\frac{2\pi}{2N} l \left(n + \frac{1}{2} \right) \right] \\
&= e^{j \frac{\pi}{2N} (k+l)} \frac{2}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} u[m, n] \cos \left[\frac{2\pi}{2N} k \left(m + \frac{1}{2} \right) \right] \cos \left[\frac{2\pi}{2N} l \left(n + \frac{1}{2} \right) \right] \\
&= e^{j \frac{\pi}{2N} (k+l)} DCT \{u[m, n]\}
\end{aligned} \tag{13}$$

Como puede verse, por tanto, existe una relación entre ambas transformadas, donde aparece un factor complejo de proporcionalidad. Su módulo, no obstante, es unitario, de forma que las propiedades de compactación de energía no se ven afectadas por el mismo (nótese que en términos estrictos esta igualdad es sólo cierta para los coeficientes $v[k, l]$ con $(k, l) \neq (0, 0)$ no para la componente continua. Pero, como es obvio es en estos términos en quienes nos centramos para analizar la compactación de energía pues sabemos a priori que la componente continua de cualquier imagen es muy elevada).

Nótese, por tanto, que podemos destacar:

- Una DCT es equivalente a una DFT de una secuencia de tamaño doble. Por ello, la anchura de la ventana por la que una señal de longitudes infinitas habría sido multiplicada por conseguir la segunda sería de longitud doble que para el caso de la primera. Por ello la dispersión producida por la convolución con el espectro de tal ventana sería más pequeña que la producida en el caso de una ventana de longitudes mitad.

- Visto el planteamiento de la DFT como coeficientes de un desarrollo en serie, véase que el desarrollo en serie de $u_c[m, n]$ es un desarrollo con transiciones menos abruptas que el desarrollo de $u[m, n]$ (no existen, por ejemplo, transiciones cielo-mar en la figura 2).

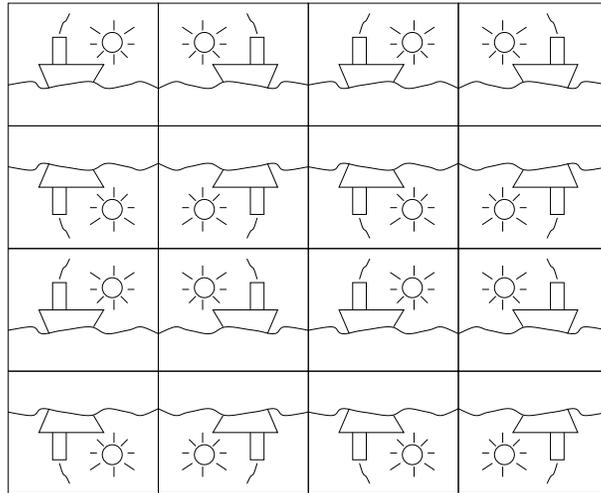


Figura 2: Extensión periódica de $u_c[m, n]$