Transformada de Fourier de un Rectángulo

Transformadas continua, discreta y DFT

2 de noviembre de 2005

- Obtenga analíticamente la transformada de Fourier $F(\xi_1, \xi_2)$ continua de una señal constante de valor unidad en el interior de un rectángulo, de lados respectivos $2T_1$ y $2T_2$, paralelo a los ejes coordenados y centrado en el origen de coordenadas (el valor de la señal será nulo fuera de dicho recinto).
- Obtenga el módulo de la DFT de una señal rectangular (de valor unitario) de longitudes respectivas N_1 y N_2.

Solución:
a) Según se dice en el enunciado

$$\begin{aligned} F(\xi_1, \xi_2) &= \int_{-T_1}^{T_1} \int_{-T_2}^{T_2} f(x,y) e^{-j2\pi(\xi_1 x + \xi_2 y)} dx dy \\ &= \int_{-T_1}^{T_1} e^{-j2\pi\xi_1 x} dx \int_{-T_2}^{T_2} e^{-j2\pi\xi_2 y} dy \\ &= F_{T_1}(\xi_1) F_{T_2}(\xi_2) \end{aligned}$$

Cada una de las funciones $F_{T_i}(\xi_i)$, $i = \{1, 2\}$ se puede escribir

$$\begin{aligned} F_{T_i}(\xi_i) &= \int_{-T_i}^{T_i} e^{-j2\pi\xi_i\tau} d\tau \\ &= -\frac{1}{j2\pi\xi_i} \left(e^{-j2\pi\xi_i\tau} \right)_{-T_i}^{T_i} \\ &= -\frac{1}{j2\pi\xi_i} \left(e^{-j2\pi\xi_i T_i} - e^{j2\pi\xi_i T_i} \right) \\ &= \frac{1}{j2\pi\xi_i} \left(e^{j2\pi\xi_i T_i} - e^{-j2\pi\xi_i T_i} \right) \\ &= \frac{\sin(2\pi\xi_i T_i)}{2\pi\xi_i T_i} 2T_i \\ &= 2T_i \mathrm{sinc}(2\xi_i T_i) \end{aligned}$$

Por ello

$$F(\xi_1, \xi_2) = 2T_1 2T_2 \mathrm{sinc}(2\xi_1 T_1) \mathrm{sinc}(2\xi_1 T_1)$$

b) Si el rectángulo está compuesto por N_1 puntos en una dirección y N_2 puntos en la otra, podemos escribir:

$$X[k,l] = \sum_{m=0}^{N_1-1} \sum_{n=0}^{N_2-1} x[m,n] e^{-j\left(\frac{2\pi}{P}km + \frac{2\pi}{Q}nl\right)}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{m=0}^{N_1-1} x_H[m] e^{-j\frac{2\pi}{P}km} \sum_{n=0}^{N_2-1} x_V[m] e^{-j\frac{2\pi}{Q}nl} \\
&= \sum_{m=0}^{N_1-1} e^{-j\frac{2\pi}{P}km} \sum_{n=0}^{N_2-1} e^{-j\frac{2\pi}{Q}nl} = \sum_{m=0}^{N_1-1} \left(e^{-j\frac{2\pi}{P}k}\right)^m \sum_{n=0}^{N_2-1} \left(e^{-j\frac{2\pi}{Q}l}\right)^n
\end{aligned}
$$

con $0 \leq k \leq P-1$ y $0 \leq l \leq Q-1$.

Cada serie es una serie geométrica de longitud finita. En particular, podemos escribirla de la forma

$$\sum_{m=0}^{L-1} r^m = S(r)$$

donde r sería, para cada serie, el término entre paréntesis de la última igualdad de la primera ecuación. Por ello, podemos escribir:

$$
S(r) = \sum_{m=0}^{L-1} r^m = \begin{cases} \text{Si } r = 1 & S(r) = L \\ \text{Si } r \neq 1 & \left.\left\{ \begin{array}{ll} S(r) & = 1 + r + r^2 + \ldots + r^{L-1} \\ rS(r) & = r + r^2 + r^3 + \ldots + r^L \\ \hline S(r)(1-r) & = 1 - r^L \end{array} \right.\right\} S(r) = \frac{1-r^L}{1-r} \end{cases}
$$

Por tanto

$$
X[k,l] = \begin{cases} \frac{1-e^{-j\frac{2\pi}{P}kN_1}}{1-e^{-j\frac{2\pi}{P}k}} \frac{1-e^{-j\frac{2\pi}{Q}lN_2}}{1-e^{-j\frac{2\pi}{Q}l}} & \left\{ \begin{array}{l} k = 1, \ldots, N_1 - 1 \\ l = 1, \ldots, N_2 - 1 \end{array} \right. \\ N_1 \frac{1-e^{-j\frac{2\pi}{Q}lN_2}}{1-e^{-j\frac{2\pi}{Q}l}} & \left\{ \begin{array}{l} k = 0 \\ l = 1, \ldots, N_2 - 1 \end{array} \right. \\ N_2 \frac{1-e^{-j\frac{2\pi}{P}kN_1}}{1-e^{-j\frac{2\pi}{P}k}} & \left\{ \begin{array}{l} k = 1, \ldots, N_1 - 1 \\ l = 0 \end{array} \right. \\ N_1 N_2 & \left\{ \begin{array}{l} k = 0 \\ l = 0 \end{array} \right. \end{cases}
$$

Para hallar el módulo, obsérvese que podemos escribir (para los valores de ambos índices no nulos)

$$X[k,l] = \frac{1-e^{-j\theta_k N_1}}{1-e^{-j\theta_k}} \frac{1-e^{-j\theta_l N_2}}{1-e^{-j\theta_l}}$$

si aceptamos que $\theta_k = \frac{2\pi k}{P}$ $\theta_l = \frac{2\pi l}{Q}$. Entonces, tomando como soporte el número complejo

$$z_{\theta_k} = \frac{1-e^{-j\theta_k M}}{1-e^{-j\theta_k}}$$

podemos proceder de la forma

$$
\begin{aligned}
|z_{\theta_k}|^2 = z_{\theta_k} z_{\theta_k}^* &= \frac{1-e^{-j\theta_k M}}{1-e^{-j\theta_k}} \frac{1-e^{j\theta_k M}}{1-e^{j\theta_k}} \\
&= \frac{1-\left(e^{j\theta_k M} + e^{-j\theta_k M}\right)+1}{1-\left(e^{j\theta_k} + e^{-j\theta_k}\right)+1} \\
&= \frac{2\left(1-\cos(\theta_k M)\right)}{2\left(1-\cos(\theta_k)\right)} = \frac{2\sin^2\left(\frac{\theta_k M}{2}\right)}{2\sin^2\left(\frac{\theta_k}{2}\right)}
\end{aligned}
$$

por lo que

$$|z_{\theta_k}| = \frac{\sin\left(\frac{\theta_k M}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta_k}{2}\right)}.$$

Así pues, podemos concluir que:

$$X[k,l] = \begin{cases} \frac{\sin\left(\frac{\theta_k N_1}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta_k}{2}\right)} \frac{\sin\left(\frac{\theta_l N_2}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta_l}{2}\right)} & \begin{cases} k = 1, \ldots, N_1 - 1 \\ l = 1, \ldots, N_2 - 1 \end{cases} \\ N_1 \frac{\sin\left(\frac{\theta_l N_2}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta_l}{2}\right)} & \begin{cases} k = 0 \\ l = 1, \ldots, N_2 - 1 \end{cases} \\ N_2 \frac{\sin\left(\frac{\theta_k N_1}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta_k}{2}\right)} & \begin{cases} k = 1, \ldots, N_1 - 1 \\ l = 0 \end{cases} \\ N_1 N_2 & \begin{cases} k = 0 \\ l = 0 \end{cases} \end{cases}$$

donde, como hemos indicado, $\theta_k = \frac{2\pi k}{P}$ $\theta_l = \frac{2\pi l}{Q}$.

c) Aproximaremos la integral que define la transformada de Fourier continua de la forma

$$\begin{aligned} F(\xi_1, \xi_2) &= \int\int f(x,y) e^{-j2\pi(\xi_1 x + \xi_2 y)} dx dy \\ &\approx \sum_m \sum_n f[m\Delta_x, n\Delta_y] e^{-j2\pi(\xi_1 m\Delta_x + \xi_2 n\Delta_y)} \Delta_x \Delta_y \\ &= \Delta_x \Delta_y X_f \left(2\pi\xi_1\Delta_x, 2\pi\xi_2\Delta_y\right) \end{aligned}$$

donde

$$X_f\left(\omega_1, \omega_2\right) = \sum_m \sum_n f[m,n] e^{-j(\omega_1 m + \omega_2 n)}$$

es decir, la transformada de Fourier de una señal discreta.

Entonces, una aproximación a la transformada de Fourier del rectángulo discreto se puede escribir, si aceptamos que $2T_1 \approx N_1\Delta_x$, $2T_2 \approx N_2\Delta_y$ y denominamos

$$\begin{aligned} \omega_1 &= 2\pi\xi_1\Delta_x \\ \omega_2 &= 2\pi\xi_2\Delta_y \end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned} X_f\left(\omega_1, \omega_2\right) &\approx \frac{F\left(\frac{\omega_1}{2\pi\Delta_x}, \frac{\omega_2}{2\pi\Delta_y}\right)}{\Delta_x\Delta_y} \\ &\approx \frac{2T_1}{\Delta_x}\frac{2T_2}{\Delta_y} \text{sinc}\left(\frac{2T_1}{2\pi\Delta_x}\omega_1\right) \text{sinc}\left(\frac{2T_2}{2\pi\Delta_y}\omega_2\right) \\ &= N_1 N_2 \text{sinc}\left(\frac{N_1\omega_1}{2\pi}\right) \text{sinc}\left(\frac{N_2\omega_2}{2\pi}\right) \end{aligned}$$

expresión que permite ver qué factores de escala son necesarios para que los valores de la DFT del pulso rectangular y los de la transformada de Fourier de la señal continua sean comparables.