

# Muestreo bidimensional

## Comparación muestreos rectangular–hexagonal

30 de marzo de 2004

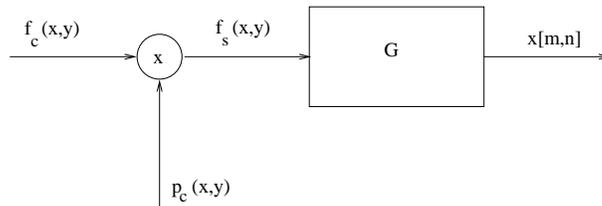


Figura 1: Diagrama de bloques de muestreo bidimensional

### Problema. Enunciado:

La señal  $f_c(x, y)$  es muestreada acorde con el siguiente criterio:

$$x[m, n] = \begin{cases} f_c(x, y)|_{x=mT_1, y=nT_2}, & \text{Si } m \text{ y } n \text{ son ambos pares o ambos impares} \\ 0 & \text{resto} \end{cases} \quad (1)$$

Para tal fin, se emplea el diagrama de bloques adjunto (figura 1). La señal  $p_c(x, y)$  se define

$$p_c(x, y) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - 2mT_1, y - 2nT_2) + \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - 2mT_1 - T_1, y - 2nT_2 - T_2) \quad (2)$$

El bloque  $G$  convierte la señal analógica resultante del producto por  $p_c(x, y)$  en la secuencia  $x[m, n]$  calculando el área bajo cada impulso, y usando el valor resultante como el valor de la secuencia en el lugar correspondiente de coordenadas discretas  $[m, n]$ .

Sabiendo que la Transformada de Fourier del tren de deltas

$$\sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \sum_{n_2=-\infty}^{\infty} \delta(x - n_1T_1, y - n_2T_2) \quad (3)$$

se puede expresar

$$\frac{1}{T_1T_2} \sum_{r_1=-\infty}^{\infty} \sum_{r_2=-\infty}^{\infty} \delta\left(\xi_1 - \frac{r_1}{T_1}, \xi_2 - \frac{r_2}{T_2}\right) \quad (4)$$

, se pide:

1.  $P_c(\xi_1, \xi_2)$
2.  $F_s(\xi_1, \xi_2)$  y  $X(\omega_1, \omega_2)$  como función de  $F_c(\xi_1, \xi_2)$
3. Asumiendo que  $F_c(\xi_1, \xi_2) = 0$  si  $\sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2} \geq \xi_0$ , determine qué condiciones deben cumplir  $T_1$  y  $T_2$  para que la señal  $f_c(x, y)$  sea correctamente muestreada.
4. Demuestre que, tomando como periodos de muestreo  $T_1$  y  $T_2$  los máximos permitidos por el teorema de Nyquist, la densidad de muestras de un muestreo rectangular es superior a la correspondiente densidad de muestras de un muestreo como el indicado en la ecuación (1)

**Solución:**

**1.-**

$$\begin{aligned}
P_c(\xi_1, \xi_2) &= \frac{1}{4T_1T_2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \delta\left(\xi_1 - \frac{k}{2T_1}, \xi_2 - \frac{l}{2T_2}\right) + \\
&\quad \frac{1}{4T_1T_2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \delta\left(\xi_1 - \frac{k}{2T_1}, \xi_2 - \frac{l}{2T_2}\right) e^{-j2\pi(\xi_1T_1 + \xi_2T_2)} \\
&= \frac{1}{4T_1T_2} \left[ \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \delta\left(\xi_1 - \frac{k}{2T_1}, \xi_2 - \frac{l}{2T_2}\right) \right] \left(1 + e^{-j2\pi(\xi_1T_1 + \xi_2T_2)}\right) \\
&= \frac{1}{4T_1T_2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \delta\left(\xi_1 - \frac{k}{2T_1}, \xi_2 - \frac{l}{2T_2}\right) \left(1 + e^{-j2\pi\left(\frac{k}{2T_1}T_1 + \frac{l}{2T_2}T_2\right)}\right) \\
&= \frac{1}{4T_1T_2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \delta\left(\xi_1 - \frac{k}{2T_1}, \xi_2 - \frac{l}{2T_2}\right) \left(1 + e^{-j2\pi\left(\frac{k+l}{2}\right)}\right) \\
&= \frac{1}{4T_1T_2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \delta\left(\xi_1 - \frac{k}{2T_1}, \xi_2 - \frac{l}{2T_2}\right) \left(1 + e^{-j\pi(k+l)}\right) \\
&= \frac{1}{4T_1T_2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \delta\left(\xi_1 - \frac{k}{2T_1}, \xi_2 - \frac{l}{2T_2}\right) \left(1 + (-1)^{k+l}\right) \\
&= \frac{1}{2T_1T_2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \delta\left(\xi_1 - \frac{k}{2T_1}, \xi_2 - \frac{l}{2T_2}\right), \text{ si } k+l \text{ par}
\end{aligned} \tag{5}$$

La figura 2 ilustra las réplicas espectrales resultantes de este tipo de muestreo.

**2.-**

$$\begin{aligned}
F_s(\xi_1, \xi_2) &= F_c(\xi_1, \xi_2) \star P_c(\xi_1, \xi_2) \\
&= \frac{1}{2T_1T_2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} F_c\left(\xi_1 - \frac{k}{2T_1}, \xi_2 - \frac{l}{2T_2}\right), \text{ si } k+l \text{ par}
\end{aligned} \tag{6}$$

Por otra parte

$$X(\omega_1, \omega_2) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[m, n] e^{-j[\omega_1m + \omega_2n]}$$

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_c(mT_1, nT_2) e^{-j[\omega_1 m + \omega_2 n]}, \text{ si } m+n \text{ par} \quad (7)$$

y dado que

$$\begin{aligned} F_s(\xi_1, \xi_2) &= \mathcal{F}[f_s(x, y)] \\ &= \mathcal{F}\left[\sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_c(mT_1, nT_2) \delta(x - mT_1, y - nT_2)\right]_{m+n \text{ par}} \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_c(mT_1, nT_2) e^{-j2\pi(\xi_1 m T_1 + \xi_2 n T_2)}, \text{ si } m+n \text{ par} \end{aligned} \quad (8)$$

por lo que

$$\begin{aligned} X(\omega_1, \omega_2) &= F_s\left(\frac{\omega_1}{2\pi T_1}, \frac{\omega_2}{2\pi T_2}\right) \\ &= \frac{1}{2T_1 T_2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} F_c\left(\frac{\omega_1 - k\pi}{2\pi T_1}, \frac{\omega_2 - l\pi}{2\pi T_2}\right), \text{ si } k+l \text{ par} \end{aligned} \quad (9)$$

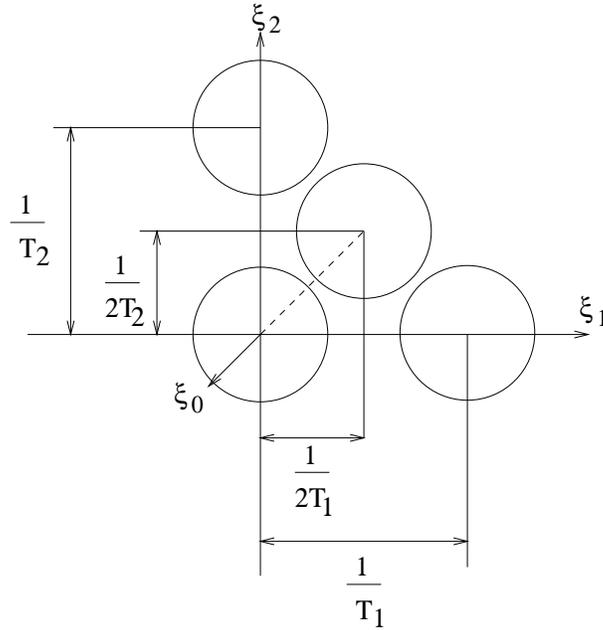


Figura 2: Réplicas espectrales de  $F_s(\xi_1, \xi_2)$ .

**3.-** A partir de la ecuación (6) podemos deducir (véase figura 2)

$$\begin{aligned} \frac{1}{T_1} - \xi_0 &> \xi_0 \Rightarrow \frac{1}{T_1} \geq 2\xi_0 \\ \frac{1}{T_2} - \xi_0 &> \xi_0 \Rightarrow \frac{1}{T_2} \geq 2\xi_0 \\ \sqrt{\left(\frac{1}{2T_1}\right)^2 + \left(\frac{1}{2T_2}\right)^2} - \xi_0 &\geq \xi_0 \Rightarrow \\ \left(\frac{1}{2T_1}\right)^2 + \left(\frac{1}{2T_2}\right)^2 &\geq 4\xi_0^2 \end{aligned} \quad (10)$$

Por tanto

$$\begin{aligned}
 T_1 &\leq \frac{1}{2\xi_0} \\
 T_2 &\leq \frac{1}{2\xi_0} \\
 \left(\frac{1}{T_1}\right)^2 + \left(\frac{1}{T_2}\right)^2 &\geq 16\xi_0^2
 \end{aligned} \tag{11}$$

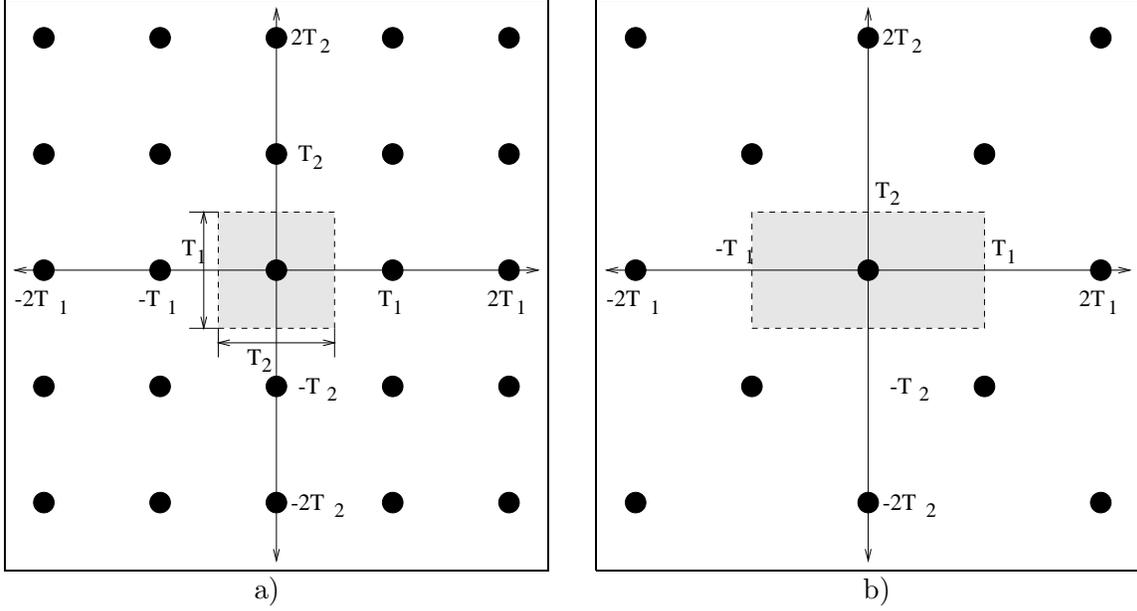


Figura 3: Rejillas de muestreo: a) rectangular b) hexagonal

4.- La densidad de muestreo se define como el número de muestras existentes por unidad de área. Para el caso de muestro rectangular, dado que se toma una muestra en cada rectángulo de dimensiones  $T_1 \times T_2$ , la densidad de muestreo  $d_{m_R}$  sería

$$\begin{aligned}
 d_{m_R} &= \frac{1}{T_1 T_2} \\
 d_{m_H} &= \frac{1}{2} d_{m_R} = \frac{1}{2T_1 T_2}
 \end{aligned} \tag{12}$$

Para el caso del muestreo hexagonal  $d_{m_H}$ , nótese que este muestreo es equivalente a eliminar una de cada dos muestras en el muestreo rectangular, de ahí la expresión dada para  $d_{m_H}$ . Estos conceptos se ilustran en la figura 3.

La cuestión es que los periodos de muestreo no tienen por qué coincidir entre ambos esquemas de muestreo. Por ello, según dice el enunciado, escojamos los máximos periodos de muestreo que cumplan el teorema de Nyquist, y comparemos ambas densidades. Para tal fin, en relación con el muestreo rectangular

$$\begin{aligned}
 T_{1R} &\leq \frac{1}{2\xi_0} \\
 T_{2R} &\leq \frac{1}{2\xi_0}
 \end{aligned} \tag{13}$$

Tomando los periodos correspondientes a la igualdad, el resultado es

$$d_{m_R} = \frac{1}{T_{1_R} T_{2_R}} = \frac{1}{\frac{1}{2\xi_0} \frac{1}{2\xi_0}} = 4\xi_0^2 \quad (14)$$

En relación con el muestreo hexagonal, las condiciones hemos visto que son

$$\begin{aligned} T_{1_H} &\leq \frac{1}{2\xi_0} \\ T_{2_H} &\leq \frac{1}{2\xi_0} \\ \left(\frac{1}{T_{1_H}}\right)^2 + \left(\frac{1}{T_{2_H}}\right)^2 &\geq 16\xi_0^2 \end{aligned} \quad (15)$$

En este caso no hay libertad de elección de cada periodo, ya que están relacionados mediante la tercera desigualdad. Escojamos, por ejemplo, el  $T_{1_H}$  correspondiente al signo de igualdad de la primera desigualdad, es decir  $T_{1_H} = 1/2\xi_0$ . Introduciendo esta elección en la tercera desigualdad

$$\begin{aligned} 4\xi_0^2 + \left(\frac{1}{T_{2_H}}\right)^2 &\geq 16\xi_0^2 \\ \left(\frac{1}{T_{2_H}}\right)^2 &\geq 12\xi_0^2 \\ T_{2_H}^2 &\leq \frac{1}{12\xi_0^2} \Rightarrow T_{2_H} \leq \frac{1}{2\sqrt{3}\xi_0} = \frac{T_{1_H}}{\sqrt{3}} < \frac{1}{2\xi_0} \end{aligned} \quad (16)$$

Y la densidad de muestreo resultante:

$$d_{m_H} = \frac{1}{2T_{1_H} T_{2_H}} = \frac{1}{2\frac{1}{2\xi_0} \frac{1}{2\sqrt{3}\xi_0}} = 2\sqrt{3}\xi_0^2 < d_{m_R} = 4\xi_0^2 \quad (17)$$